Матэматыка

УДК 517.956.32

Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии

Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков
Белорусский государственный университет

Ранее смешанные задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны решались методом характеристик только с помощью некоторых продолжений правой части, начальных данных и граничного данного вне области задания этих задач.

Цель настоящей работы состояла в нахождении явного вида классических решений для уравнения колебаний полуограниченной струны более общего вида

$$\partial_t - a_2\partial_x + b_2 \quad \partial_t + a_1\partial_x + b_1 \;\; u(x,t) = f(x,t),\, a_1 > 0,\, a_2 \geq 0,\, \{x,t\} \in G = \;0,\infty \times 0,\infty \;,$$

при начальных условиях $\partial_t - a_2\partial_x + b_2 \quad \partial_t + a_1\partial_x + b_1 \;\; u(x,t) = f(x,t),\, a_1 > 0,\, a_2 \geq 0,\, \{x,t\} \in G = \;0,\infty \times 0,\infty$ *, и граничном условии*

$$\left[\; \alpha_2(t)\partial_t + \beta_2(t)\partial_x + \gamma_2(t) \quad \alpha_1\partial_t + \beta_1\partial_x + \gamma_1 u \;\right]\Big|_{x=0} = \mu(t),\; 0 \leq t < \infty,$$

без какого-либо продолжения исходных данных f, φ, ψ *и* μ *этой смешанной задачи вне множества G. В этой смешанной задаче* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *– непрерывные функции переменной t и* $b_1, b_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *– вещественные постоянные. Рассмотрен случай граничного условия с нехарактеристическими направлениями первых косых производных в факторизованной второй косой производной на конце струны, т.е.* $a\alpha_i \neq \beta_i,\; t \in [0,\infty[,\; i = 1, 2.$

Поставленная смешанная задача решена методом характеристик и методом Дюамеля.

Выведены две формулы ее классических решений, одна из которых является обобщением известной формулы Даламбера под характеристикой x= a_1t, а вторая формула дает решение соответствующей граничной задачи над характеристикой x= a_1t. Для существования и единственности классических решений данной смешанной задачи установлены следующие необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное:

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0,\infty[, \psi \in C^1[0,\infty[, \mu \in C[0,\infty[, \; \int_0^t e^{b_i\tau} f(|x + (-1)^i a_i(t-\tau)|, \tau)d\tau \in C^1(G),\; i = 1, 2,$$

$$\alpha_2(0)\{\alpha_1[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_2 + b_1)\psi(0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] +$$
$$+\beta_1\psi'(0) + \gamma_1\psi(0)\} + \beta_2(0)[\alpha_1\psi'(0) + \beta_1\varphi''(0) + \gamma_1\varphi'(0)] + \gamma_2(0)[\alpha_1\psi(0) + \beta_1\varphi'(0) + \gamma_1\varphi(0)] = \mu(0).$$

Ключевые слова: *явная формула решения, необходимые и достаточные условия, условия согласования, смешанная задача, факторизованное гиперболическое уравнение, вторая косая производная.*

Classical Solutions of Inhomogeneous Factorized Second-Order Hyperbolic Equation in a Quarter of the Plane with a Seminonstationary Second Directional Derivative in the Boundary Condition

F.E. Lomovtsev, E.N. Novikov
Belarusian State University

Previously mixed problems for an inhomogeneous equation of oscillations of a semi-infinite strings were solved by the characteristics of just using some extensions of the right-hand side, the initial data and the boundary value outside of the regions for these problems.

The aim of this work was to find the explicit form of classical solutions for the semi-infinite string oscillations of more general form

$$\partial_t - a_2\partial_x + b_2 \quad \partial_t + a_1\partial_x + b_1 \ u(x,t) = f(x,t),\, a_1 > 0,\, a_2 \ge 0,\, \{x,t\} \in G = \ 0,\infty \ \times \ 0,\infty \ ,$$

with the initial conditions $\partial_t - a_2\partial_x + b_2 \quad \partial_t + a_1\partial_x + b_1 \ u(x,t) = f(x,t),\, a_1 > 0,\, a_2 \ge 0,\, \{x,t\} \in G = \ 0,\infty \ \times \ 0,\infty \ ,$ *and the boundary condition*

$$\left[\ \alpha_2(t)\partial_t + \beta_2(t)\partial_x + \gamma_2(t) \quad \alpha_1\partial_t + \beta_1\partial_x + \gamma_1 u \ \right]\Big|_{x=0} = \mu(t),\ 0 \le t < \infty,$$

without any extension of the original data f, φ, ψ *and* μ *of this mixed problem outside of set G. In this mixed problem* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *– continuous functions of the variable t and* $b_1, b_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *– real constants. We consider the case of the boundary condition with non-characteristic directions of the first directional derivatives into the factored second directional derivative at the end of the string, i.e.* $a\alpha_i \ne \beta_i,\ t \in [0,\infty[,\ i = 1, 2.$

The posed mixed problem is solved by the method characteristics and the Duhamel's method.

We derive two formulas of its classical solutions, one of which is a generalization of the well-known d'Alembert's formula under the characteristic x = a_1t, and the second formula gives the solution of the corresponding boundary value problem over of the characteristic x = a_1t. For the existence and uniqueness of classical solutions of the posed mixed problem we determine the following necessary and sufficient conditions of smoothness and consistency conditions on the right-hand side of equation initial data and boundary value:

$$f \in C(G), \varphi \in C^2[0,\infty[, \psi \in C^1[0,\infty[, \mu \in C[0,\infty[,\ \int_0^t e^{b_i\tau} f(|x + (-1)^i a_i(t-\tau)|, \tau)d\tau \in C^1(G),\ i = 1, 2,$$

$$\alpha_2(0)\{\alpha_1[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_2 + b_1)\psi(0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] +$$
$$+\beta_1\psi'(0) + \gamma_1\psi(0)\} + \beta_2(0)[\alpha_1\psi'(0) + \beta_1\varphi''(0) + \gamma_1\varphi'(0)] + \gamma_2(0)[\alpha_1\psi(0) + \beta_1\varphi'(0) + \gamma_1\varphi(0)] = \mu(0).$$

Key words: *closed-form expression for a solution, necessary and sufficient conditions, matching conditions, mixed problem, factorized hyperbolic equation, second directional derivative.*

В настоящей работе, без использования метода продолжения (отражения) исходных данных f, φ, ψ, μ задачи вне множества G ее задания, найдены в явном виде формулы более простого вида, чем в работе [1], для классических решений $u(x,t) \in C^2(G)$ смешанной задачи (1)–(3) и установлены необходимые и достаточные условия на f, φ, ψ, μ для ее корректности по Адамару. Эти условия состоят из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и из необходимого и достаточного условия согласования начальных условий (2) с граничным условием (3) и уравнением (1). Аналогичная задача с факторизованной второй косой производной в граничном условии для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны нами была решена в [2]. Вторая косая производная в граничном условии (3) выражает наличие на конце струны $x = 0$ динамической силы, сопротивления среды, пропорционального его смещению, скорости и ускорению. Впервые явный вид классических решений смешанной задачи в четверти плоскости для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной первой косой производной в граничном условии и также только достаточные условия на φ, ψ, μ были получены в [3]. Позже были найдены формулы классических решений смешанной задачи в четверти плоскости для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной первой косой производной в граничном условии, а также установлены необходимые и достаточные условия на f, φ, ψ, μ в [4]. Формулы классических решений некоторой смешанной задачи для однородного уравнения колебаний ограниченной струны при стационарной первой косой производной на одном конце ограниченной струны и смещениях на другом конце выведены в [5].

Материал и методы. В четверти плоскости $G = [0,\infty[\times [0,\infty[$ решается смешанная задача:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2\frac{\partial}{\partial x} + b_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_1\frac{\partial}{\partial x} + b_1\right)u(x,t) = f(x,t),$$

$$a_1 > 0,\ a_2 \ge 0,\ \{x,t\} \in G = \ 0,\infty \ \times \ 0,\infty \ , \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x < \infty, \qquad (2)$$

$$\left(\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t} + \beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1\right)u\right)\bigg|_{x=0} =$$

$$= \mu(t),\ 0 \le t < \infty, \qquad (3)$$

где $f, \varphi, \psi, \mu, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – заданные функции независимых переменных x и t; $b_1, b_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – вещественные постоянные и $\beta_i \ne a_1\alpha_i,\ t \in [0,\infty[,$ $i = 1, 2.$ Установим необходимые и достаточные условия на f, φ, ψ и μ для корректной разрешимости смешанной задачи (1)–(3) во множестве классических решений $u(x,t) \in C^2(G)$. Исследуем и решаем смешанную задачу (1)–(3) методом характеристик и методом Дюамеля.

Результаты и их обсуждение. Пусть $C^k(G)$ – множество всех k = 1, 2 раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве G, $C(G)$ – множество всех непрерывных функций на $G \subset \mathrm{P}^2$ и P – вещественная прямая. Для решений $u(x,t) \in C^2(G)$ из уравнения (1), начальных условий (2) и граничного условия (3) вытекают необходимые требования гладкости

$$f \in C(G),\ \varphi \in C^2[0,\infty[,\ \psi \in C^1[0,\infty[,\ \mu \in C[0,\infty[, \quad (4)$$

которых для функции f очевидно недостаточно для гладкости классических решений смешанной задачи (1)–(3). Полагаем t = 0 в граничном условии (3), вычисляем значение левой части полученного равенства с помощью уравнения (1) при x = 0, t = 0 и начального условия (2) при x = 0 и получаем необходимое условие согласования

$$\begin{aligned} &Y \equiv \alpha_2(0)\{\alpha_1[f(0,0)+(a_2-a_1)\psi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)- \\ &-(b_2+b_1)\psi(0)-(a_1b_2-a_2b_1)\varphi'(0)-b_1b_2\varphi(0)]+\beta_1\psi'(0)+ \\ &+\gamma_1\psi(0)\}+\beta_2(0)[\alpha_1\psi'(0)+\beta_1\varphi''(0)+\gamma_1\varphi'(0)]+ \\ &+\gamma_2(0)[\alpha_1\psi(0)+\beta_1\varphi'(0)+\gamma_1\varphi(0)]=\mu(0), \end{aligned} \quad (5)$$

где одним и двумя штрихами над функциями обозначены соответственно их первая и вторая производные. Множество G делится характеристикой $x = a_1t$ на два множества:

$$G_1 = \{x,t\} \in G : x > a_1t,\ t > 0 \ ,$$
$$G_2 = \{x,t\} \in G : x \le a_1t,\ x \ge 0 \ .$$

Теорема. *Пусть функции* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C[0,\infty[$ *и* $a_1\alpha_i \ne \beta_i$, $t \in [0,\infty[$, $i = 1, 2$. *Смешанная задача (1)–(3) имеет единственные классические решения* $u(x,t) \in C^2(G)$ *вида*:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\ a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t)+a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t)+$$
$$\left.+e^{-At}\int_{x-a_1t}^{x+a_2t} e^{B(x-s)}\ A\varphi(s)+\psi(s)\ ds\right)+F(x,t), \{x,t\} \in G_1, \quad (6)$$

$$u_2(x,t) = \Phi(x,t)+$$
$$+a_1\int_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{Ct-D(a_1\tau+x)}\left(a_1\int_0^{\tau}\frac{P(\nu)e^{a_1\int_\nu^\tau E(s)ds+b_1\nu}}{(a_1\alpha_1-\beta_1)(a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu))}d\nu+\right.$$
$$\left.+\frac{b_2\varphi(0)+\psi(0)-a_2\varphi'(0)}{a_1+a_2}e^{a_1\int_0^\tau E(s)ds}\right)d\tau+ \quad (7)$$
$$+F(x,t), \{x,t\} \in G_2,$$

где

$$A = \frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2}, B = \frac{b_2-b_1}{a_1+a_2}, C = \frac{b_1\beta_1-a_1\gamma_1}{a_1\alpha_1-\beta_1},$$
$$D = \frac{b_1\alpha_1-\gamma_1}{a_1\alpha_1-\beta_1}, E(t) = \frac{b_1\alpha_2(t)-\gamma_2(t)}{a_1\alpha_2(t)-\beta_2(t)},$$

$$F(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t e^{A(\tau-t)} \times$$
$$\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{B(x-s)} f(|s|,\tau)\,ds\,d\tau,$$

$$\Phi(x,t) = \frac{e^{-b_2t}}{a_1+a_2}(a_1\varphi(x+a_2t)+a_2e^{B(x+a_2t)}\varphi(0)+$$
$$+\int_0^{x+a_2t} e^{B(x+a_2t-s)}\ A\varphi(s)+\psi(s)\ ds),$$

$$P(t) = \mu(t)-\Big\{\ (\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\times$$
$$\times\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}+\beta_1\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)\ \Phi(x,t)+F(x,t)\quad \Big\}\Big|_{x=0},$$

тогда и только тогда, когда выполняются условие согласования (5), требования гладкости (4) и

$$\int_0^t e^{b_i\tau} f\ \left|x+(-1)^ia_i(t-\tau)\right|, \tau\ d\tau \in C^1(G), i = 1, 2. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Во множестве G_1 решениями исходной смешанной задачи являются, очевидно, решения задачи Коши (1), (2). Методом характеристик находится общее решение уравнения (1)

$$u(x,t) = e^{-b_2t}g(x+a_2t)+e^{-b_1t}h(x-a_1t)+F(x,t),$$
$$\{x,t\} \in G, \quad (9)$$

где g и h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции в G, $f = f(s,\tau)$ – подынтегральная функция на множестве G_1 и $f = f(|s|,\tau)$ – подынтегральная функция на множестве G_2. Указанное выше частное решение $F(x,t)$ уравнения (1) выводится методом Дюамеля. Двукратным дифференцированием проверяется достаточность требований гладкости (4),

(8) на f для того, чтобы функция $F(x,t)\in C^2(G)$. Поскольку функция $F(x,t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению (1) и однородным начальным условиям (2), то достаточно решить задачу Коши (1), (2) при $f=0$. Подставив эквивалентный вид

$$u(x,t)=e^{Bx-At}[g(x+a_2t)+h(x-a_1t)]$$

общего решения (9) для однородного уравнения (1) в начальные условия (2), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} g(x)+h(x)=e^{-Bx}\varphi(x), \\ a_2g'(x)-a_1h'(x)-A[g(x)+h(x)]=e^{-Bx}\psi(x). \end{cases} \tag{10}$$

В силу первого уравнения этой системы ее вторым уравнением становится уравнение x

$$a_2g'(x)-a_1h'(x)=e^{-Bx}[A\varphi(x)+\psi(x)].$$

Суммируя это уравнение с первой производной по x первого уравнения системы (10), умноженной на a_1, находим дифференциальное уравнение x

$$g'(x)=(a_1+a_2)^{-1}[\Psi(x)+a_1(e^{-Bx}\varphi(x))'],$$

где функция $\Psi(x)=e^{-Bx}[A\varphi(x)+\psi(x)]$. Интегрируя его по x, имеем решения

$$g(x)=(a_1+a_2)^{-1}\left[\int_0^x\Psi(s)ds+a_1e^{-Bx}\varphi(x)\right]+\tilde{C},$$
$$\forall\tilde{C}\in\mathrm{P}. \tag{11}$$

Тогда из первого уравнения системы (10) выводим решения

$$h(x)=(a_1+a_2)^{-1}\left[a_2e^{-Bx}\varphi(x)-\int_0^x\Psi(s)ds\right]-\tilde{C},\forall\tilde{C}\in\mathrm{P}. \tag{12}$$

Подставляя решения (11), (12) системы (10) в общее решение однородного уравнения получаем обобщенную формулу Даламбера (6). При доказательстве достаточности требований гладкости (4) и (8) на f, φ, ψ в G_1 сначала исключаем из вторых производных u_{tt}, u_{tx}, u_{xx} непрерывные слагаемые в G_1 благодаря гладкости (4) и потом к оставшимся слагаемым применяем требование гладкости (8).

Решения задачи (1)–(3) в G_2 ищем, как решения задачи Дарбу для уравнения (1) при граничном условии (3) и граничном условии на другой стороне угла G_2. Решения уравнения (1) должны совпадать с непрерывными продолжениями решений u_1 из угла G_1 на характеристику $x=a_1t$, и эти решения должны удовлетворять граничному условию (3). В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} e^{-b_2t}g\ \ (a_1+a_2)t\ \ +e^{-b_1t}h(0)=\dfrac{a_1}{a_1+a_2}e^{-b_2t}\varphi\ \ (a_1+a_2)t\ \ + \\ +\dfrac{a_2}{a_1+a_2}e^{-b_1t}\varphi(0)+\dfrac{1}{a_1+a_2}\displaystyle\int_0^{(a_1+a_2)t}e^{-Bs-b_1t}\ \ A\varphi(s)+\psi(s)\ \ ds, \\ \left\{\left(\alpha_2(t)\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta_1\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)\times\right. \\ \left.\left.\times\ e^{-b_1t}h(x-a_1t)\ \ \right\}\right|_{x=0}= \\ =\mu(t)-\left\{\ \left(\alpha_2(t)\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta_1\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)\times\right. \\ \left.\left.\times\ e^{-b_2t}g(x+a_2t)+F(x,t)\ \ \right\}\right|_{x=0}. \end{cases} \tag{13}$$

Из ее первого уравнения заменой $y=(a_1+a_2)t\geq 0$ находим функцию

$$g(y)=\frac{a_1}{a_1+a_2}\varphi(y)+\frac{a_2}{a_1+a_2}e^{By}\varphi(0)-e^{By}h(0)+$$
$$+\frac{1}{a_1+a_2}\int_0^y e^{B(y-s)}\ \ A\varphi(s)+\psi(s)\ \ ds. \tag{14}$$

Подстановкой функции (14) при $y=x+a_2t\geq 0$ во второе уравнение системы (13) выводим дифференциальное уравнение

$$\left\{\ \left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\times\right.$$
$$\times((\beta_1-a_1\alpha_1)e^{-b_1t}h'(x-a_1t)+ \tag{15}$$
$$\left.\left.+(\gamma_1-b_1\alpha_1)e^{-b_1t}h(x-\alpha_1t))\ \ \right\}\right|_{x=0}=P_h(t)$$

с правой частью $P_h(t)=P(t)+P_0(t)h(0)$, где множитель

$$P_0(t)=\left(\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}+\beta_1\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)e^{Bx-At}\ \ \right)\right|_{x=0}=$$
$$=(a_1\alpha_1-\beta_1)(a_1\alpha_2(t)-\beta_2(t))\ \ B+D\quad B+E(t)\ \ e^{-At}.$$

Благодаря постоянным коэффициентам $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ приводим уравнение (15) заменой функции $H(a_1t-x)=(\beta_1-a_1\alpha_1)h'(x-a_1t)+(\gamma_1-b_1\alpha_1)h(x-a_1t)$ к виду

$$e^{b_1t}\left.\left\{\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\ e^{-b_1t}H(a_1t-x)\ \ \right\}\right|_{x=0}=$$
$$=(a_1\alpha_2(t)-\beta_2(t))H'(a_1t)+(\gamma_2(t)-$$
$$-b_1\alpha_2(t))H(a_1t)=e^{b_1t}P_h(t).$$

Отсюда заменой $\sigma=a_1t\geq 0$ выводим дифференциальное уравнение

$$(a_1\alpha_2(\sigma/a_1)-\beta_2(\sigma/a_1))H'(\sigma)+(\gamma_2(\sigma/a_1)-$$
$$-b_1\alpha_2(\sigma/a_1))H(\sigma)=e^{b_1\frac{\sigma}{a_1}}P_h(\sigma/a_1). \qquad (16)$$

Это уравнение делим на $a_1\alpha_2(\sigma/a_1)-\beta_2(\sigma/a_1)$, умножаем на интегрирующий множитель $\chi_1(\sigma)=\exp\left(-\int_0^{\sigma}E(p/a_1)dp\right)$ и получаем дифференциальное уравнение

$$\left(H(\sigma)e^{-\int_0^{\sigma}E(p/a_1)dp}\right)'=\frac{P_h(\sigma/a_1)e^{-\int_0^{\sigma}E(p/a_1)dp+b_1\frac{\sigma}{a_1}}}{a_1\alpha_2(\sigma/a_1)-\beta_2(\sigma/a_1)}.$$

Интегрируя его по σ, находим общее решение уравнения (16)

$$H(\sigma)=\int_0^{\sigma}\frac{P_h(w/a_1)e^{\int_w^{\sigma}E(p/a_1)dp+b_1\frac{w}{a_1}}}{a_1\alpha_2(w/a_1)-\beta_2(w/a_1)}dw+C_1e^{\int_0^{\sigma}E(p/a_1)dp},$$
$$\forall C_1\in \mathrm{P}.$$

В нем делаем замену переменных $p=a_1s,\ s\geq 0,$ $w=a_1\nu,\ \nu\geq 0,$ и имеем все решения

$$H(\sigma)=a_1\int_0^{\sigma/a_1}\frac{P_h(\nu)e^{a_1\int_{\nu}^{\sigma/a_1}E(s)ds+b_1\nu}}{a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu)}d\nu+C_1e^{a_1\int_0^{\sigma/a_1}E(s)ds},$$

из которых при $\sigma=0$ определяем значения постоянной

$$C_1=H(0)=(\beta_1-a_1\alpha_1)h'(0)+(\gamma_1-b_1\alpha_1)h(0).$$

Возвращаясь здесь от функции H к функции h и делая замену $z=-\sigma\leq 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$(\beta_1-a_1\alpha_1)h'(z)+(\gamma_1-b_1\alpha_1)h(z)=$$
$$=a_1\int_0^{-z/a_1}\frac{P_h(\nu)e^{a_1\int_{\nu}^{-z/a_1}E(s)ds+b_1\nu}}{a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu)}d\nu+$$
$$+\ (\beta_1-a_1\alpha_1)h'(0)+(\gamma_1-b_1\alpha_1)h(0)\ e^{a_1\int_0^{-z/a_1}E(s)ds}. \qquad (17)$$

Его мы делим на $\beta_1-a_1\alpha_1$, умножаем на интегрирующий множитель $\sigma_2(z)=\exp\{Dz\}$ и приходим к дифференциальному уравнению

$$\left(h(z)e^{Dz}\right)'=e^{Dz}\left(a_1\int_0^{-z/a_1}\frac{P_h(\nu)e^{a_1\int_{\nu}^{-z/a_1}E(s)ds+b_1\nu}}{(\beta_1-a_1\alpha_1)(a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu))}d\nu+\right.$$
$$\left.+\ h'(0)+Dh(0)\ e^{a_1\int_0^{-z/a_1}E(s)ds}\right).$$

Его интегрированием по z выводим общее решение уравнения (17)

$$h(z)=\int_0^{z}e^{D(\rho-z)}\left(a_1\int_0^{-\rho/a_1}\frac{P_h(\nu)e^{a_1\int_{\nu}^{-\rho/a_1}E(s)ds+b_1\nu}}{(\beta_1-a_1\alpha_1)(a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu))}d\nu+\right.$$
$$\left.+\ h'(0)+Dh(0)\ e^{a_1\int_0^{-\rho/a_1}E(s)ds}\right)d\rho+C_2e^{-Dz},\ \forall C_2\in \mathrm{P},$$

в котором делаем замену $\rho=-a_1\tau,\ \tau\geq 0,$ и имеем решения

$$h(z)=a_1\int_0^{-z/a_1}e^{-D(a_1\tau+z)}\left(a_1\int_0^{\tau}\frac{P_h(\nu)e^{a_1\int_{\nu}^{\tau}E(s)ds+b_1\nu}}{(a_1\alpha_1-\beta_1)(a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu))}d\nu-\right.$$
$$\left.-\ h'(0)+Dh(0)\ e^{a_1\int_0^{\tau}E(s)ds}\right)d\tau+C_2e^{-Dz}, \qquad (18)$$

из которых при $z=0$ находим значения постоянной $C_2=h(0)$.

Подстановкой функций g и h в общее решение (9) уравнения (1) согласно формулам (14), (18) при $C_2=h(0)$ в G_2 получаем решения

$$u_2(x,t)=\Phi(x,t)+a_1\int_0^{t-\frac{x}{a_1}}e^{Ct-D(a_1\tau+x)}\times$$
$$\times\left(a_1\int_0^{\tau}\frac{P_h(\nu)e^{a_1\int_{\nu}^{\tau}E(s)ds+b_1\nu}}{(a_1\alpha_1-\beta_1)(a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu))}d\nu-\right.$$
$$\left.-\ h'(0)+Dh(0)\ e^{a_1\int_0^{\tau}E(s)ds}\right)d\tau-h(0)e^{Bx-At}+ \qquad (19)$$
$$+h(0)e^{Ct-Dx}+F(x,t).$$

Значения производной $h'(0)$ определяются из условия равенства частных производных первого порядка от решения u_2 из G_2 и предельных значений частных производных первого порядка от решения u_1 из G_1 на характеристике $x = a_1 t$. На этой характеристике их разности равны

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x=a_1 t} =$$

$$= -\frac{a_1 e^{-tb_1} \; (b_1 - b_2)h(0) + b_2\varphi(0) + \psi(0) + (a_1 + a_2)h'(0) - a_2\varphi'(0)}{a_1 + a_2},$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a_1 t} =$$

$$= \frac{e^{-tb_1} \; (b_1 - b_2)h(0) + b_2\varphi(0) + \psi(0) + (a_1 + a_2)h'(0) - a_2\varphi'(0)}{a_1 + a_2}.$$

Отсюда выводим значение производной

$$h'(0) = \; (b_2 - b_1)h(0) - b_2\varphi(0) - \psi(0) + a_2\varphi'(0) \; / (a_1 + a_2).$$

В выражение (19) подставляем найденное значение $h'(0)$ и получаем решение

$$u_2(x,t) = \Phi(x,t) + a_1 \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{Ct - D(a_1\tau + x)} \times$$

$$\times\left(a_1 \int_0^{\tau} \frac{P_h(\nu) e^{a_1 \int_{\nu}^{\tau} E(s)ds + b_1\nu}}{(a_1\alpha_1 - \beta_1)(a_1\alpha_2(\nu) - \beta_2(\nu))} d\nu + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{b_2\varphi(0) + \psi(0) - a_2\varphi'(0)}{a_1 + a_2} + \; B + D \; h(0) \right) e^{a_1 \int_0^{\tau} E(s)ds} \right) d\tau -$$

$$- h(0)e^{Bx - At} + h(0)e^{Ct - Dx} + F(x,t). \qquad (20)$$

Убедимся в том, что в выражении (20) сумма всех слагаемых, содержащих множитель $h(0)$, равна нулю, т.е. справедливо равенство

$$-e^{Bx - At} + e^{Ct - Dx} + a_1^{\,2} \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{Ct - D(a_1\tau + x)} \times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{P_0(\nu) e^{a_1 \int_{\nu}^{\tau} E(s)ds + b_1\nu}}{(a_1\alpha_1 - \beta_1)(a_1\alpha_2(\nu) - \beta_2(\nu))} d\nu d\tau -$$

$$-a_1 \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} \; B + D \; e^{Ct - D(a_1\tau + x)} e^{a_1 \int_0^{\tau} E(s)ds} d\tau = 0. \qquad (21)$$

Для этого в левой части равенства (21) первый интеграл приводим к виду

$$I_1 = a_1^{\,2} \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} \; B + D \; e^{Ct - D(a_1\tau + x)} \int_0^{\tau} B + E(\nu) \; e^{a_1 \int_{\nu}^{\tau} E(s)ds - a_1 B\nu} d\nu d\tau.$$

Сначала в нем интегрируем по частям внутренний интеграл

$$-a_1 \int_0^{\tau} \; B + E(\nu) \; e^{a_1 \int_{\nu}^{\tau} E(s)ds - a_1 B\nu} d\nu = e^{-a_1 B\tau} - e^{a_1 \int_0^{\tau} E(s)ds}.$$

Затем подставляем значение этого интеграла в I_1 и находим его значение

$$I_1 = -a_1 \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} \; B + D \; e^{Ct - D(a_1\tau + x)} \left(e^{-a_1 B\tau} - e^{a_1 \int_0^{\tau} E(s)ds} \right) d\tau =$$

$$= e^{Bx - At} - e^{Ct - Dx} + a_1 \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} \; B + D \; e^{Ct - D(a_1\tau + x)} e^{a_1 \int_0^{\tau} E(s)ds} d\tau.$$

Подстановка данного значения интеграла I_1 в равенство (21) подтверждает его справедливость.

Поэтому решения (20) приобретают вид (7).

Вычисляются частные производные второго порядка от решения (7) и непосредственно проверяется, что если f, φ, ψ, μ удовлетворяют требованиям гладкости (4), (8), то решения (7) дважды непрерывно дифференцируемы на множестве G_2.

По построению решение u_2 и его частные производные первого порядка из G_2 соответственно совпадают с предельными значениями решения u_1 и его частных производных первого порядка из G_1 а характеристике $x = a_1 t$. Разности значений частных производных второго порядка от u_2 и предельных значений частных производных второго порядка от u_1 на этой характеристике $x = a_1 t$ соответственно равны:

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right|_{x=a_1 t} = \frac{a_1^{\,2} e^{-b_1 t} \; \mu(0) - Y}{a_1\alpha_1 - \beta_1 \; a_1\alpha_2(0) - \beta_2(0)},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|_{x=a_1 t} = \frac{e^{-b_1 t} \; \mu(0) - Y}{a_1\alpha_1 - \beta_1 \; a_1\alpha_2(0) - \beta_2(0)},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x}\right|_{x=a_1 t} = \frac{a_1 e^{-b_1 t} \; Y - \mu(0)}{a_1\alpha_1 - \beta_1 \; a_1\alpha_2(0) - \beta_2(0)}.$$

Эти соотношения показывают, что если верно условие согласования (5), то все частные производные второго порядка от решений u_2 и u_1 совпадают на характеристике $x = a_1 t$. Итак, достаточность условий (4), (5), (8) для существования классических решений смешанной задачи (1)–(3)

в G установлена. Единственность решений (6) и (7) обеспечивает метод решения.

Н е о б х о д и м о с т ь. Для любой правой части $f \in C(G)$, $f \neq 0$, уравнение (1) имеет непрерывно дифференцируемое частное решение $u_0(x,t) = F(x,t) \in C^1(G)$. Тогда непрерывно дифференцируемыми должны быть его первые косые производные

$$(u_0)_t - (-1)^i a_i (u_0)_x = -b_i u_0 +$$

$$+ \int_0^t e^{-b_{3-i}(t-\tau)} f(|x-(-1)^i a_{3-i}(t-\tau)|, \tau)\, d\tau \in C^1(G),$$

$$i = 1, 2,$$

соответственно вдоль характеристик $x - a_1 t = C_1$, $x + a_2 t = C_2$, $\forall C_1, C_2 \in \mathrm{P}$ уравнения (1). Это подтверждает необходимость требования (8), так как $u_0(x,t) \in C^1(G)$. Теорема доказана.

Замечание. *Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами более общего вида*

$$u_{tt} + bu_{xt} - au_{xx} + cu_t + du_x + ru = f,$$

где $r = (ac^2 + bcd - d^2)/(b^2 + 4a)$, $a > 0$, *сводится к уравнению (1) с коэффициентами*

$$a_i = (\sqrt{b^2 + 4a} - (-1)^i b)/2,$$

$$b_i = (a_i c + (-1)^i d)/(a_1 + a_2), i = 1, 2.$$

Заключение. В настоящей работе, без применения метода продолжения правой части уравнения, начальных и граничных данных вне множества задания смешанной задачи (1)–(3), найдены в явном более простом виде ее единственные классические решения, которые выражаются формулами (6) и (7) на множествах G_1 и G_2 соответственно. Из этих формул выводится их непрерывная зависимость от исходных данных задачи f, φ, ψ и μ в топологии равномерной сходимости. Таким образом, смешанная задача (1)–(3) является корректной по Адамару в соответствующей паре пространств решений и исходных данных. Установлены необходимые и достаточные условия (4), (5), (8) существования, единственности и устойчивости ее классических решений. Условия (4), (8) представляют собой необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное, которые обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость решений этой задачи вне характеристики $x = a_1 t$. Условие (5) позволяет нам гладко «сшить» решения (6) и (7) вдоль характеристики $x = a_1 t$, так как оно выражает согласованность начальных условий (2) с граничным условием (3) и уравнением (1).

В условии (8) принадлежность интеграла множеству $C^1(G)$ эквивалентна его принадлежности множествам $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$. Здесь $C^{(1,0)}(G)$ и $C^{(0,1)}(G)$ – множества соответственно непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на множестве G.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Моисеев, Е.И. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии / Е.И. Моисеев, Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Докл. АН. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
2. Ломовцев, Ф.Е. Классические решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2014. – № 2(80). – С. 5–12.
3. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
4. Ломовцев, Ф.Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. – 2012. – Сер. 1, № 1. – С. 83–86.
5. Моисеев, Е.И. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим краевым условием / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 10. – С. 1412–1417.

R E F E R E N C E S

1. Moiseev E.I., Lomovcev F.E., Novikov E.N. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of The Academy of Sciences], 2014, 459, 5, pp. 544–549.
2. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Vestn. Vitebsk. Gos. Univ*. [Newsletter of Vitebsk State Univeraity], 2014, 2(80), pp. 5–12.
3. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. *Differ. Uravn.* [Differential Equations], 2009, 8(45), 1188–1191.
4. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Vestn. Belarus. Gos. Univ.* [Newsletter of Belarusian State University], 2012, 1(1), pp. 83–86.
5. Moiseev E.I., Holomeyeva A.A. *Differ. Uravn.* [Differential Equations], 2012, 10(48), pp. 1412–1417.

Поступила в редакцию 19.02.2015

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.